

Momento angular en mecánica cuántica.

- Importancia del momento angular:

- clásico
- Clásicamente para un sistema aislado L es una constante de movimiento.
 - Clásicamente para una partícula en un potencial central $L = \text{cte}$.
 - $\Rightarrow$ el mov ocurre en un plano
 - $\Rightarrow$ obedece 2ª ley de Kepler: A igual en t igual.

Cuánticamente:

L está asociado con un observable $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$

- Veremos que en un potencial central L_x, L_y y L_z son ctes de mov.
- Esto ayudará a obtener y clasificar los eV de H .
- Denotaremos con $\vec{L}$ momento angular orbital a momentos angulares con análogo clásico.
- $\vec{S}$ momento angular de espín. Sin análogo clásico.
- En un átomo, los distintos $\vec{L}_i$ se combinan con los $\vec{S}_i$ y obtenemos $\vec{J}$ momento angular total.
También usamos J para hablar de m.a. en general.

- Obtendremos las propiedades de $\vec{J}$ a partir de reglas de conmutación.

- Para $\vec{L}$ estas reglas se siguen $[x, p] = i\hbar$

- Para $\vec{S}$ tomaremos las reglas de conmutación como def. pero luego veremos que tienen un origen geométrico.

- Reglas de conmutación para $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$$

$$L_x = y p_z - z p_y$$

- Como $[y, p_z] = 0$

y $[z, p_y] = 0$ no es

necesario simetrizar.
 $\Rightarrow L_x = \frac{1}{2}(y p_z + p_z y) - \frac{1}{2}(z p_y + p_y z)$

- Análogamente L_y, L_z

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = x p_x + y p_y + z p_z \quad (\text{B-35})$$

In classical mechanics, the scalar product $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ is commutative, and one can just as well write:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = p_x x + p_y y + p_z z \quad (\text{B-36})$$

But when $\mathbf{r}$ and $\mathbf{p}$ are replaced by the corresponding observables $\mathbf{R}$ and $\mathbf{P}$, the operators obtained from (B-35) and (B-36) are not identical [see relations (B-33)]:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \neq \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \quad (\text{B-37})$$

Moreover, neither $\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$ nor $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$ is Hermitian:

$$(\mathbf{R} \cdot \mathbf{P})^\dagger = (X P_x + Y P_y + Z P_z)^\dagger = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \quad (\text{B-38})$$

To the preceding postulates, therefore, must be added a symmetrization rule. For example, the observable associated with $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ will be:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}) \quad (\text{B-39})$$

which is indeed Hermitian. For an observable which is more complicated than $\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$, an analogous symmetrization is to be performed.

The observable A which describes a classically defined physical quantity $\mathcal{A}$ is obtained by replacing, in the suitably symmetrized expression for $\mathcal{A}$, $\mathbf{r}$ and $\mathbf{p}$ by the observables $\mathbf{R}$ and $\mathbf{P}$ respectively.

$$\begin{aligned} -[L_x, L_y] &= [y p_z - z p_y, z p_x - x p_z] \\ &= \underbrace{[y p_z, z p_x]}_{\substack{z \text{ y } p_z \\ \text{no conmutan}}} - \underbrace{[y p_z, x p_z]}_{\text{no conmutan}} - \underbrace{[z p_y, z p_x]}_{\text{no conmutan}} + \underbrace{[z p_y, x p_z]}_{\substack{z \text{ y } p_z \\ \text{no conmutan}}} \\ &= y p_x [p_z, z] + x p_y [z, p_z] \\ &= -i\hbar y p_x + i\hbar x p_y \\ &= i\hbar L_z \end{aligned}$$

- Análogo

$$- [L_x, L_y] = i\hbar L_z ; [L_z, L_x] = i\hbar L_y ; [L_y, L_z] = i\hbar L_x$$

$\therefore$ No podemos medir L_x, L_y y L_z simultáneamente.

- Usando el tensor de Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{if } (i, j, k) \text{ is } (1, 2, 3), (2, 3, 1), \text{ or } (3, 1, 2), \\ -1 & \text{if } (i, j, k) \text{ is } (3, 2, 1), (1, 3, 2), \text{ or } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{if } i = j, \text{ or } j = k, \text{ or } k = i \end{cases}$$

$\rightarrow (i, j, k) \leftarrow$

Par los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$-(\vec{A} \times \vec{B})_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ijk} A_i B_j$$

- Con notación de Einstein $(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$

- Las reglas de conmutación quedan

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$$

- Definición de momento angular

Un momento angular $\vec{J}$ es aquel que satisface

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= i\hbar J_z \\ [J_y, J_z] &= i\hbar J_x \\ [J_z, J_x] &= i\hbar J_y \end{aligned}$$

Definimos también

$$\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

Nota: $\vec{J}^2$ es Hermitiano pues J_x, J_y, J_z lo son.
Conmutadores importantes

Veamos que $[\vec{J}^2, J_i] = 0$

$$\begin{aligned} [\vec{J}^2, J_x] &= [J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, J_x] = [J_y^2, J_x] + [J_z^2, J_x] \\ &\quad [J_x, J_x] = 0 \end{aligned}$$

$$[J_y^2, J_x] = J_y [J_x, J_x] + [J_x, J_x] J_y$$

$$= -i\hbar J_y J_z - i\hbar J_z J_y$$

$$[J_z^2, J_x] = J_z [J_z, J_x] + [J_z, J_x] J_z$$

$$= i\hbar J_z J_y + i\hbar J_y J_z$$

$$\therefore [J^2, J_x] = 0$$

Análogamente $[J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0$

$\therefore$ Podemos medir J^2 junto con L_x, L_y o L_z ↓

Para un potencial central

L^2, L_x, L_y, L_z son ctes. de mov.
Pero no conmutan entre sí.

Podemos construir una base de e.V. comunes a H, L^2 y L_z (1/ejemplo) (hablar de eje de cuantización.)

∴ Podemos medir J^2 y UNA componente simultáneamente.

{ Al eje que elegimos para describir al sistema se le llama eje de cuantización.

Se suele poner el eje de cuantización a lo largo de z .

Buscaremos e.V. comunes a J^2, J_z

Teoría de momento angular

• J_+ y J_-

Suele ser conveniente usar

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad \text{y} \quad J_- = J_x - iJ_y$$

Son operadores de escalera. No hermitianos.
Conjugados entre sí.

Obs: No son hermitianos, $J_+^\dagger = J_-$; $J_-^\dagger = J_+$

Reglas de conmutación para J_+ y J_- :

$$\begin{aligned} [J_z, J_+] &= [J_z, J_x + iJ_y] = [J_z, J_x] + i[J_z, J_y] \\ &= i\hbar J_y + \hbar J_x = \hbar J_+ \end{aligned}$$

$$[J_z, J_-] = -\hbar J_-$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

$$[J^2, J_+] = [J^2, J_-] = [J^2, J_z] = 0$$

$$\begin{aligned} J_+ J_- &= (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 - iJ_x J_y + iJ_y J_x \\ &= J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \end{aligned}$$

$$J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$$